جلسه یازدهم

در ابتدای این جلسه به تکلیفی که در جلسه‌ی پیش مقرر کرده بودیم پاسخ خواهیم داد.

می‌خواهیم با استفاده از قضیه کوریولیس رابطه‌ی بین $D_e(D_e r_{OA})$ و $D_{Ch}(D_{Ch} r_{OA})$ را بدست آوریم.

قضیه‌ی کوریولیس که به صورت زیر است برای هر بردار r ای برقرار است.

$$D_u r = D_s r + \omega_{u\,s} \times r$$

همان‌طور که می‌دانید $D_s r$ و $D_u r$ نیز بردار هستند و در رابطه‌ی فوق می‌توانند جایگزین r شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} D_u(D_u r) &= D_s(D_u r) + \omega_{u\,s} \times (D_u r) = D_s(D_s r + \omega_{u\,s} \times r) + \omega_{u\,s} \times (D_s r + \omega_{u\,s} \times r) \\ &= D_s(D_s r) + D_s(\omega_{u\,s} \times r) + \omega_{u\,s} \times D_s r + \omega_{u\,s} \times (\omega_{u\,s} \times r) \\ &= D_s(D_s r) + D_s(\omega_{u\,s}) \times r + \omega_{u\,s} \times D_s r + \omega_{u\,s} \times D_s r + \omega_{u\,s} \times (\omega_{u\,s} \times r) \\ &= D_s(D_s r) + D_s(\omega_{u\,s}) \times r + 2\omega_{u\,s} \times D_s r + \omega_{u\,s} \times (\omega_{u\,s} \times r) \end{aligned}$$

بنابراین قضیه‌ی کوریولیس، روابط شتاب از دید دو دستگاه را به صورت زیر بدست می‌دهد:

$$D_u^2 r = D_s^2 r + D_s(\omega_{u\,s}) \times r + 2\omega_{u\,s} \times D_s r + \omega_{u\,s} \times (\omega_{u\,s} \times r)$$

هر یک از ترم‌های عبارت فوق عنوانی دارند. اگر $D_u^2 r$ شتاب واقعی باشد آن‌گاه:

$D_s^2 r$ شتاب ظاهری، $D_s(\omega_{u\,s}) \times r$ شتاب مماسی، $2\omega_{u\,s} \times D_s r$ شتاب کوریولیس، $\omega_{u\,s} \times (\omega_{u\,s} \times r)$ شتاب جانبی یا جانب مرکز می‌باشد.

در رابطه‌ی بین شتاب‌ها از دید دو دستگاه s و u، سرعت زاویه‌ای ω و مشتقات آن را مشاهده می‌کنید. مطابق با این رابطه اگر r از دید دستگاه s سرعتی داشته باشد ترم $D_s r$ وجود خواهد داشت. اگر ترم‌های $D_s(\omega_{u\,s})$ و $D_s r$ نداشته باشیم، تنها ترم $\omega_{u\,s} \times (\omega_{u\,s} \times r)$ اختلافی بین شتاب‌ها از دید دو دستگاه u و s ایجاد می‌کند.

توجه داشته باشید که می‌توانیم به جای ${}^{s}D_s^2 r$ از ${}^{s}\ddot{r}$ و به جای ${}^{u}D_u^2 r$ از ${}^{u}\ddot{r}$ استفاده نماییم.

حال می‌خواهیم بر اساس مسأله‌ی چرخ و فلک، شتاب از دید دستگاه زمین در دستگاه چرخ (یا قطبی) را بدست آوریم. فرض می‌کنیم s همان دستگاه چرخ و u دستگاه زمین باشد.

با توجه به نتایج مسأله مقادیر زیر مشخص می‌باشد.

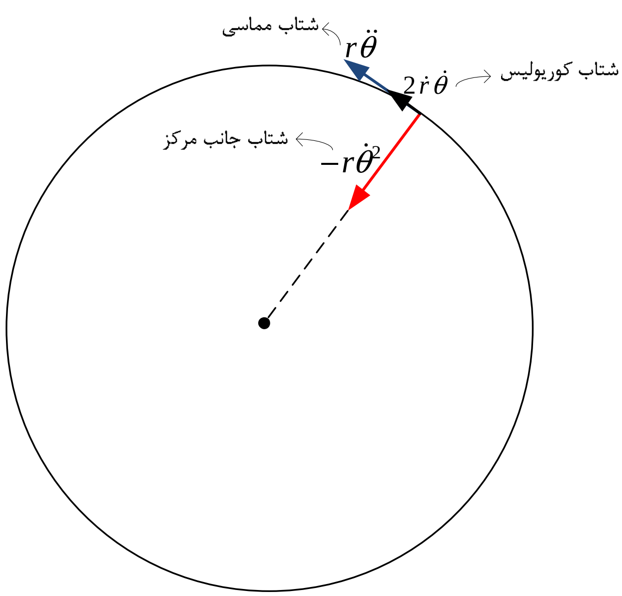
$$ {}^{s}r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^{s}\omega_{u\,s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} $$

بنابراین داریم:

$$ \begin{aligned} {}^{s}\ddot{r} &= {}^{u}\ddot{r} + {}^{s}(D_s(\omega_{u\,s})) \times {}^{s}r + 2\,{}^{s}\omega_{u\,s} \times {}^{s}(D_s r) + {}^{s}\omega_{u\,s} \times {}^{s}(\omega_{u\,s} \times r) \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

در این مثال اگر $\dot{r}$صفر باشد شتاب ظاهری و شتاب کوریولیس صفر خواهند شد. صفر شدن$\dot{r}$ در این مثال به این معنی است که کودک روی یک صندلی روی چرخ نشسته است و روی آن راه نمی‌رود. و اگر ناظری روی چرخ ایستاده و به کودک نگاه کند شتاب صفری خواهد دید ولی از دید کسی که روی زمین ایستاده است شتاب غیرصفر است. همچنین اگر سرعت دورانی ثابت باشد آن‌گاه شتاب دورانی $\ddot{\theta}$ نیز صفر خواهد بود. در این صورت تنها ترم ${}^{s}\omega_{u\,s} \times {}^{s}(\omega_{u\,s} \times r)$ باقی می‌ماند. این ترم همان است که در فیزیک دبیرستان $r\omega^2$ بود.

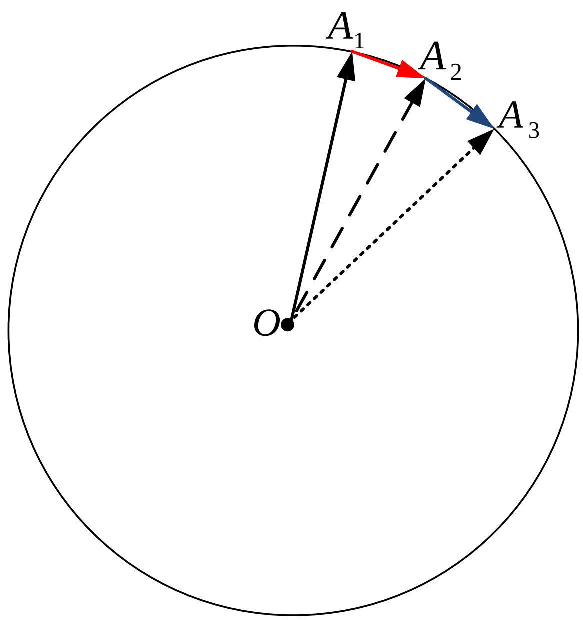
در این مثال شتاب کوریولیس نیز شتابی مماسی است(در راستای محور دوم دستگاه چرخ) که در صورت تغییر r کودک بوجود می‌آید. راستای شتاب‌ها در این مثال را می‌توانید در شکل زیر مشاهده نمایید.



مسیرحرکت

اگر از شما بپرسند در همان مثال چرخ و فلک کودک روی چرخ چه مسیر حرکتی دارد چه پاسخی می‌دهید؟ باید بپرسید از دید چه دستگاهی؟

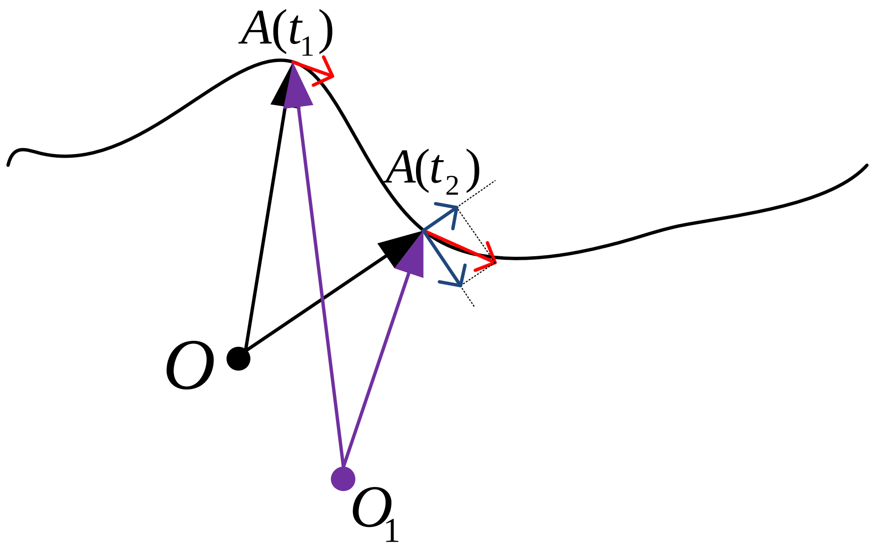
اگر بگویند ناظر را چسبیده به چرخ درنظر بگیرید یا از دید دستگاه چرخ چه مسیر حرکتی دارد. همان‌طور که مشخص است مسیر حرکت کودکی که روی چرخ در حال حرکت راه می‌رود، از دید دستگاه چرخ یک خط در راستای شعاع چرخ است. همچنین اگر کودک تنها روی چرخ نشسته باشد، مسیر حرکت او از دید دستگاه زمین بر روی یک دایره دیده می‌شود.



اگر از دید دستگاه زمین، کودک در یک لحظه در A_1 و در لحظه‌ی بسیار کوچک بعد درA_2 قرار داشته باشد برای رسیدن به مسیر حرکت او، کافی است r_{OA}ها را از دید زمین رسم نموده و با وصل کردن Aها به هم به مسیر حرکت برسیم. همانطور که می‌دانید، بردارA_1A_2 یا ΔA با سرعت از دید دستگاه زمین با یک ضریب Δt متناسب است.به بردار A_1A_2 در دو لحظه‌ی بسیار کوچک بردار مماس بر مسیر حرکت گفته می‌شود. بنابراین، سرعت از دید هر دستگاهی بر مسیری که آن دستگاه می‌بیند مماس است.

در مثال چرخ، $r\dot{\theta}$ مماس بر مسیر حرکت از دید دستگاه زمین است اگر که $\dot{r} = 0$. و $\dot{r}$ مماس بر مسیر حرکت از دید دستگاه چرخ است. به این ترتیب وقتی مسیر حرکت از دید دستگاهی را ترسیم می‌کنید، مانند این است که راستای سرعت از دید همان دستگاه را ترسیم می‌نمایید.

فرض کنید مسیر حرکت جسمی به صورت شکل زیر باشد.

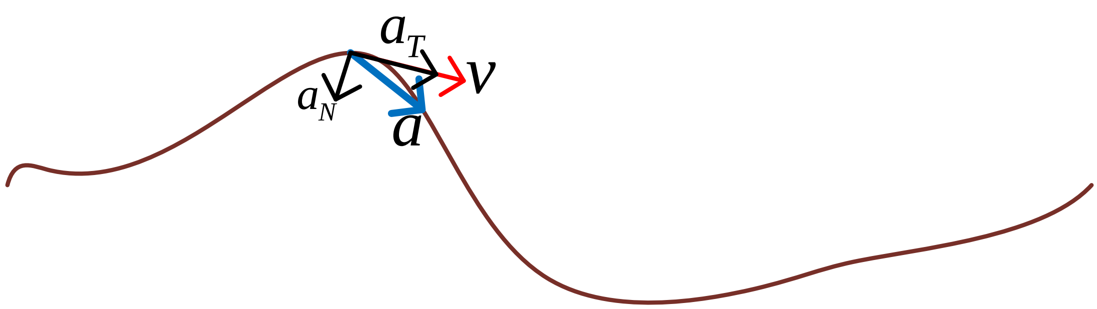


در این شکل می‌توانیم بگوییم اندازه‌ی OA از دید ناظر در حال تغییر است و می‌توانیم سرعت را به دو مولفه، یکی در راستای r_{OA} و دیگری عمود بر آن تجزیه نماییم. همواره می‌توانیم این کار را برای هر مسیر حرکت از دید هر دستگاهی انجام دهیم. به مولفه سرعت در امتدادr_{OA} سرعت شعاعی و به مولفه‌ی سرعت عمود بر امتدادr_{OA} سرعت دورانی حول نقطه‌ی O گفته می‌شود.

در مثال چرخ نیز اگر سرعت شعاعی از دید ناظر زمینی وجود نداشته باشد، مسیر حرکت به صورت دایروی دیده می‌شود.

سرعت شعاعی فاصله را کم و زیاد می‌کند ولی سرعت دورانی باعث دوران حول نقطه‌ی O می‌گردد. توجه داشته باشید که با تغییر O همه‌ی سرعت‌ها تغییر می‌کنند، چرا که بردار r_{OA}ها تغییر می‌کنند. مثلاً اگر نقطه‌ی O به نقطه‌ی O_1 برده شود، و OO_1 از دید این دستگاه ثابت باشد، آن‌گاه r_{OA} با r_{O_1A} فرق دارد ولی به دلیل اینکه $\dot{r}_{O_1O}$ صفر است سرعت OA از دید دستگاه تغییری نمی‌کند ولی تعبیر دوسرعت شعاعی و مماسی تغییر می‌کند.

شتاب نیز تغییرات سرعت است. شتاب را نیز مانند سرعت می‌توان همواره به دو مولفه یکی در راستای سرعت(a_T) و دیگری عمود بر سرعت (a_N) تجزیه نمود. به شتاب در راستای سرعت، شتاب مماسی و به شتاب عمود بر راستای سرعت، شتاب نرمال، جانبی یا قائم گفته می‌شود. شتاب مماسی باعث افزایش یا کاهش اندازه‌ی سرعت می‌شود ولی شتاب جانبی سرعت را می‌چرخاند و مسیر حرکت را دوران می‌دهد.



باید توجه داشته باشید که با توجه به فرضی که ابتدای مبحث در مورد اینکه همه‌ی دستگاه‌ها طول را یکسان می‌بینند، اندازه‌ی سرعت نیز از دید همه ی دستگاه‌ها یکسان است.

تا این جلسه به بحث دیدن حرکت، توضیح دادن و بیان نمودن مشتقات حرکت پرداختیم. به همه‌ی این مباحث سینماتیک گفته می شود. به این ترتیب ما بحث سینماتیک در فضای سه بعدی را به اتمام رساندیم.

از جلسه‌ی بعد به بحث چرایی حرکت خاص و عوامل موثر بر آن خواهیم پرداخت که به آن دینامیک گفته می‌شود.